Über eine physikalische Erklärung der zonalen Druckwellen durch Anwendung der Kreiseltheorie

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu Frankfurt a. M.

vorgelegt von

Rüdiger Mannweiler

aus Wiesbaden

1939

Druckerei wissenschaftlicher Werke Konrad Triltsch, Würzburg-Aumühle

Referent: Professor Dr. R. Mügge.
Korreferent: Professor Dr. Linke.

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1938.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen lieben Eltern
in Dankbarkeit gewidmet!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546401_0087

In einer der letzten Dissertationen, die aus der Leipziger Meteorologenschule hervorgegangen ist, wird das Problem behandelt: Stratosphärische Steuerung, Troposphärische Steuerung oder Wellensteuerung. Das Problem wird in der „Schmiedel"schen Arbeit zu Gunsten der letzteren, der Wellensteuerung, entschieden. Dieselbe ist genereller Natur und soll dadurch sowohl den Anhängern der Stratosphärensteuerung, als auch denen der Troposphärensteuerung, also den Norwegern, gerecht werden.

Die Vertreter der Wellensteuerung (Leipziger Meteorologenschule) trennen die Atmosphäre nicht in eine aktive und passive Schicht (Troposphäre und Stratosphäre oder umgekehrt), da bis heute kein Beweis erbracht sei für die Abhängigkeit einer der beiden Schichten von der anderen. Das Kausalverhältnis wird überhaupt nicht berührt, sondern angenommen, daß sowohl in der Stratosphäre als in der Troposphäre Primärvorgänge auftreten, die dann auch zu Wettergeschehen in der anderen Atmosphärenschicht führen.

Als die den Wetterverlauf bestimmenden ursächlichen Faktoren werden die Druckschwankungen angesehen. Es wird aber nicht von primären und sekundären Schwankungen gesprochen, sondern nur von Schwingungen des Luftmeeres von längeren und kürzeren Perioden. Dabei wird den periodischen Schwingungen mit großer Schwingungsdauer ein wesentlicher Einfluß auf die Großwetterlage, also auf die Stratosphäre zugesprochen, während die Wellen mit kurzer Periode mehr die eigentliche Wettergestaltung verursachen sollen.

Es ist jedenfalls einwandfrei klar, daß in unserem Gesamtwettergeschehen sich gewisse Erscheinungen mehr oder weniger genau wiederholen, oft sogar in periodischer Folge. Am schönsten ist diese Tatsache festgestellt worden bei dem allgemeinen Luftdruckgang einer Station. Zeichnet man denselben als Funktion der Zeit auf, so erhält man einen Kurvenzug. Nun läßt sich nach bekannten mathematischen Prinzipien (Fourier-Reihen) jeder Kurvenzug durch Superposition von Sinusschwingungen erzeugen. So kann man sich den obigen, verhältnismäßig unregelmäßigen Luftdruckgang entstanden denken durch das Zusammenwirken mehrerer periodischer Luftdruckwellen. Diese Verhältnisse sind

von Weickmann genauer durchforscht worden. Es werden vorwiegend konstituierende Wellen von den Periodenlängen 2, 4, 6, 8, 16, 32, 36, 72 Tagen gefunden

Daß die Verhältnisse der Wirklichkeit von den Idealverhältnissen der Superposition etwas abweichen, nimmt nicht wunder. Eine ganze Reihe kleiner Faktoren wirkt luftdruckbeeinflussend und stört dadurch die genaue periodische Übereinstimmung und Wiederholung. Trotzdem ist es Weickmann und seinen Schülern gelungen, gewisse Punkte auf den Luftdruckkurven zu finden, an denen sich die Kurve erstaunlich spiegelt; er nennt sie Symmetriepunkte. Um ein Maß der Übereinstimmung rechts und links vom Symmetriepunkt zu erhalten, werden Korrelationskoeffizienten berechnet und ebenfalls wieder in einem Kurvenzug aufgetragen, wobei noch gewisse Korrektionen vorgenommen werden (Temp. Korr), um die Verhältnisse im Winter an die im Sommer anzugleichen. Aus der Symmetrie um die Symmetriepunkte glaubt nun Schmiedel für kommendes Wetter wichtige Voraussagen machen zu können, sofern nur erst dieser Punkt hinreichend bestimmt ist. Über die praktische Verwertbarkeit dieser Methode soll hier nicht gesprochen werden. Das Homburger Institut für langfristige Wettervoraussage hat einen Versuch gemacht mit der Methode und ist wieder abgekommen, weil sie sich anscheinend nicht bewährt hat.

Wie dem allen auch sei, es steht jedenfalls fest, daß gewisse Luftdruckwellen existieren. Bei einigen derselben ist auch der Versuch gemacht worden, ihr Entstehen physikalisch zu erklären. Nach Schmiedel nimmt die Welle mit der Periode 36 Tage eine gewisse Sonderstellung ein. Es ist eine Welle, die sich zonal bewegt und für die auch schon von Lettau eine physikalische Erklärung gegeben worden ist als „Margules"sche westwärts wandernde pare Schwingung 4. Klasse von Typus 4.

Die ebenfalls eine Sonderstellung einnehmende 24tägige Welle[1]) hat meridionale Richtung und ist eine ausgesprochen troposphärische Welle. Ihre Abhängigkeit von entsprechenden Temperaturschwankungen ist offensichtlich. Sie wird deshalb erklärt als die Folge von periodisch erfolgendem Abtropfen von Kaltluftmassen aus der Polarkalotte, die dann meridional nach Süden abwandern.

Es ist auf diese Weise, auch rein energetisch gesehen, das Bestehen der 24tägigen Welle gesichert und erklärt. Aber wie erklärt man die anderen Wellen, wo kommt die Schwingungsenergie her? Was versteht man insbesondere unter einer stehenden Schwingung des freien Luftmeeres, wie es etwa bei der 36tägigen Welle heißt?

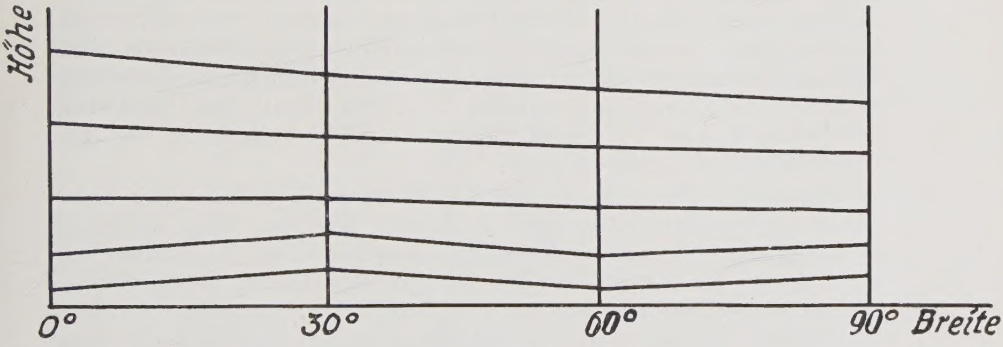
[1]) siehe Schmiedel: S. 36—37.

Im folgenden soll nun der Versuch gemacht werden, einige der Wellen mathematisch-physikalisch zu erklären. Der Grundgedanke der ganzen Idee stammt von Herrn Professor Dr. Mügge. Die Rechnungen wurden unter Verwendung physikalischer Werke, besonders F. Klein und A. Sommerfeld: „Über die Theorie des Kreisels" durchgeführt.

Rotierende Luftringe als Kreisel, die eine Präzession ausführen.

Die Betrachtungen basieren auf einigen Eigenschaften der allgemeinen großräumigen Zirkulation der Atmosphäre. Es ist deshalb notwendig, einen kurzen Überblick über dieselbe zu geben.

Lufttransporte kommen zustande durch Druckgradienten. Die Richtung und auch ihre ungefähre Größe ist am einfachsten zu ersehen aus einer Darstellung der Flächen gleichen Druckes. (siehe Fig.)



Es sind sofort die Stellen hohen Druckes am Boden in den Subtropen und den Polargebieten zu erkennen. Die Hauptisobarenflächen erscheinen hier gehoben, sodaß in den Aequipotentialflächen gegenüber der Umgebung ein Druckgefälle eintritt. Das Subtropenhoch, das sich bis in große Höhen hinauf fortsetzt und vermutlich durch Wirkung des Strahlungsgleichgewichtes herausbildet, wird nur noch übertroffen durch das Äquatorhoch in der Höhe, das seinerseits entstanden ist durch die Hebung der Isobarenflächen durch die starke Bodenerwärmung. Während also am Boden Luftmassen von den Roßbreiten zum Äquator verfrachtet werden (Passat), erfolgt der entgegengesetzte Vorgang in der Höhe. (Antipassat).

In den Gebieten von etwa 30°—60° Breite ist der Druckgradient durchweg polwärts gerichtet bis zu großen Höhen. Wir finden hier entsprechend das Gebiet der vorwiegenden Westwinde, die ja bekanntlich aus dem Südwind durch die, auf der Nordhalbkugel

rechtsablenkende, auf der Südhalbkugel linksablenkende Corioliskraft entstehen.

Nördlich des 60. Breitengrades liegen die Verhältnisse im Durchschnitt wieder umgekehrt. (Entsprechend auf der Südhalbkugel). Der Druckgradient ist südwärts gerichtet, die Luftmassen erfahren also auf der Nordhalbkugel zunächst eine Beschleunigung nach Süden. Da es sich nun bei sämtlichen Bewegungen auf der Erde um Relativbewegungen handelt, so erleidet jede durch Druckgradienten bewegte Luftmasse die Coriolisbeschleunigung. Nördlich des Äquators ist dieselbe nach rechts gerichtet, südlich nach links. Wir betrachten der Einfachheit halber die Vorgänge nur auf der Nordhalbkugel. Auf der anderen gelten alle Überlegungen entsprechend.

Die Folge dieser ablenkenden Kraft ist nun eine Umlenkung des Windes. Hierdurch ändert sich aber der Druckgradient in Richtung des Weges. Es kann also nur so lange eine Beschleunigung der Luftmassen durch den Druckgradienten eintreten, wie noch eine Komponente desselben längs eines Bahnelementes wirksam ist. Ein Südwind wird von dem polwärts gerichteten Druckgradienten nur solange beschleunigt, bis er durch die Corioliskraft zum Westwind geworden ist, also der Druckgradient nunmehr vollständig von der Corioliskraft aufgehoben wird.

Aus diesen Betrachtungen ist auch zu ersehen, daß eine Luftmasse unmöglich, besonders in hohen Breiten, über mehrere Breitengrade auf einmal verfrachtet werden kann. Es müßten zudem durch die Erhaltung des Rotationsmomentes Geschwindigkeiten entstehen, wie sie in Wirklichkeit nie bemerkt wurden. Luftmassen können somit gewissermaßen nur sprungweise ihre geographische Breite um mehrere Grade ändern.

Wird bei solchen, längs der Breitenkreise wehenden Winden die Strömungsgeschwindigkeit durch irgend welche Einflüsse vergrößert, so bleibt der Gradient zwar derselbe, aber die Corioliskraft wächst, da sie von der Geschwindigkeit abhängt. ($C = 2\,v\omega \cdot \sin\varphi$) Westwinde bekommen dann also eine Tendenz zum Äquator, Ostwinde zum Pol hin. Durch diese Erscheinung wird ja bekanntlich die Rückkehr der Luftmassen vom Pol her zum äquatorialen Kreislauf, trotz des polwärts gerichteten Druckgradienten zwischen Subtropen und Polarkalotte bis in größere Höhen hinauf, erklärt.

Die Winde längs der Breitenkreise werden am Boden durch die Wirkung der Erdoberfläche die verschiedenste Störung erfahren, sowohl was ihre Richtung, als auch ihre Stärke angeht. Aber diejenigen in der Höhe wehen ungestört längs des gesamten Umfanges des betreffenden Breitenkreises. So wurden z. B. in den

Subtropen Westwinde in der Höhe von etwa 60—100 km/St Geschwindigkeit gemessen und etwa ebensostarke Ostwinde in der Höhe über dem Äquator. Auch polwärts des 30. Breitengrades treten oft dieselben Verhältnisse auf.

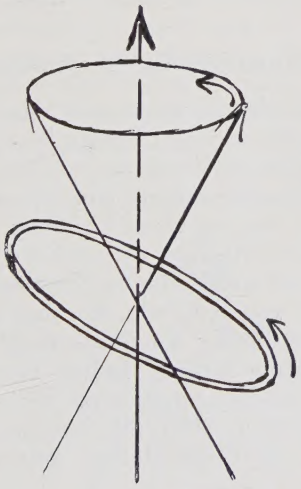
Diese strömenden Luftmassen kann man nun als rotierende Ringe, also als Kreisel ansehen. Ihre Figurenachse deckt sich so gut wie vollständig mit der Erdachse. Wir betrachten einmal speziell den Luftring der Roßbreiten, der eine Westostgeschwindigkeit von 100 km/Std haben möge. Die Rotationsgeschwindigkeit beträgt bei

100 km/Std $\omega = \frac{2\,\pi}{T}$, wobei $T = \frac{40\,000}{100}$ Std $= \frac{400}{24}$ Tage $=$

$16^2/_3$ Tage, die Zeit eines Umlaufes ist.

$$\text{Also: } \omega = \frac{2\,\pi}{16^2/_3} = 0{,}377.$$

Ein um die Figurenachse rotierender Kreisel kann nun außer dieser Rotation unter gewissen Umständen noch weitere Bewegungen ausführen. Zum Beispiel die sogenannte reguläre Präzession, die pseudoreguläre Präzession, die Pendelbewegung, die Nutation.



Nehmen wir nun einmal an, daß unser Luftkreisel eine reguläre Präzession ausführte. Die Figurenachse würde dann einen Kreiskegel um die Erdachse beschreiben, wobei der Hochdruckring der Roßbreiten eine entsprechende Rotation erfährt. Er wird also auf der einen Seite gegen Norden gehoben, auf der Gegenseite nach Süden gesenkt und in dieser schrägen Lage führt er dann

eine Rotation aus. Die Folge dieser Erscheinung ist dann, daß das Roßbreitenhoch nach Norden an einer Stelle verschoben wird und dieses Hoch im Tempo der Präzession um die Erde herum eilt. Die Massenteilchen des Ringes folgen der Präzessionserscheinung dabei nur insofern, als sie nach Norden beziehungsweise nach Süden gezwungen werden. Sie selbst besitzen also keine Präzessionsgeschwindigkeit, sondern nur der Ring als Ganzes.

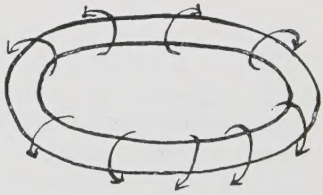
Da es sich bei unserem Problem um ein solches in höheren Schichten der Troposphäre bis zur Stratosphäre handelt, so überlagert sich diese periodische Luftdruckschwankung den Druckgebilden der niedrigeren Troposphäre. Es wäre also auf diese Weise durchaus eine wellenartige Luftdruckänderung zu erklären. Es fragt sich nur, in welchem Tempo erfolgt diese eventuelle Präzession, falls überhaupt eine solche möglich ist, und welche Umlaufsrichtung hat sie?

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, daß die physikalischen Grundvoraussetzungen für das Auftreten einer solchen regulären Präzession gegeben sind und das Problem somit durchaus von gewisser Bedeutung für den Meteorologen, speziell für den Anhänger der Wellensteuerung sein kann. Die Folgerung aus der ganzen Rechnung soll nach derselben gezogen werden.

Allgemeine Grundbedingungen für das Auftreten einer Präzession.

Bei den zu studierenden Bewegungen eines rotierenden Körpers liegen bekanntlich die an die Relativbewegung anknüpfenden Eulerschen Gleichungen zu Grunde.

Diese beziehen sich aber an sich nur auf einen starren Körper, was so ohne weiteres von unserem Luftring nicht behauptet werden kann. Aber es gibt Fälle von rotierenden, nicht absolut starren Körpern, bei denen eine stattfindende Präzession einwandfrei nachgewiesen ist, z. B. bei unserer Erde. Bei den ungeheuren Ozeanen, die eine Massenverschiebung durchaus möglich machen, tritt als Reaktion außerirdischer Kräfte keine Verschiebung von Teilmassen der Erde, sondern nur eine Präzession der Gesamterdkugel ein. Auch stellen rotierende Luftmassen quasistabile Gebilde dar, wie man an elementaren, physikalischen Versuchen

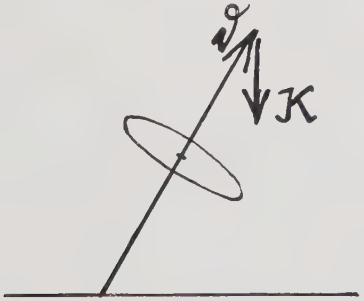


zeigen kann, z. B. Rauchringe beim Rauchen. Man kann durch solche selbst größere Flammen zum Erlöschen bringen. (Hierbei findet allerdings eine Rotation der Massenteilchen um den Ringwulst herum statt).
Luftwirbel spielen für den Flugzeugführer und Konstrukteur eine sehr wichtige Rolle und führen oft ein erstaunlich zähes Dasein, sodaß sie durchaus mit rotierenden starren Massen verglichen werden können. (Randwirbel am Tragdeck z. B.)

Auch Zyklonen bestehen über mehrere Tage hinaus und beweisen, als rotierende Luftmassen aufgefaßt, eine große Stabilität. Ferner spricht Hann (vgl. Hann-Süring S. 499 oben) „von dem bedeutenden (mechanischen) Beharrungsvermögen der Gürtel hohen Luftdruckes in den Subtropen", die mit unserem Luftring der Roßbreiten ja identisch sind.

Es steht also auch durchaus in dem Bereich der Möglichkeit, daß außer der Rotation unseres Luftringes um seine Figurenachse eine Präzession entstehen kann. Welches sind nun die Grundvoraussetzungen zum Auftreten einer solchen?

Um diese Frage klar beantworten zu können, ist es notwendig, die mathematischen Gleichungen eingehender zu studieren, die die allgemeine Rotation beherrschen. Es sind das, wie oben schon erwähnt wurde, die bekannten Eulerschen Gleichungen. Sie sollen hier in einer schon etwas vereinfachten Form benutzt werden, nämlich der, bei welcher das im rotierenden Körper festliegende Achsensystem sich mit den sogenannten Hauptträgheitsachsen deckt. Es sind das die Hauptachsen des Trägheitsellipsoides, mit anderen Worten die Richtungen des Körpers, um welche das Trägheitsmoment desselben einen Extremwert annimmt.



Es seien A, B, C, diese Hauptträgheitsmomente. L, M, N, seien ferner die Komponenten einer von außen auf den rotierenden Körper wirkenden Kraft K, und p, q, r die Komponenten eines Vektors d, der in die Figurenachse fällt und dessen Betrag ein Maß für die Rotationsgeschwindigkeit ist.

Die Eulerschen Gleichungen lauten dann:

$$L = A \cdot \frac{dp}{dt} - (B—C) \cdot q \cdot r,$$

$$M = B \cdot \frac{dq}{dt} - (C—A) \cdot r \cdot p,$$

$$N = C \cdot \frac{dr}{dt} - (A—B) \cdot p \cdot q.$$

Wir behandeln zunächst das Problem: Wann kann ein Körper ohne Einwirkung von Außenkräften um eine Achse rotieren, die im Raum dauernd festliegt? Es ist also die Voraussetzung:

$$L = M = N = 0 \text{ und}$$

$$\frac{dp}{dt} : \frac{dq}{dt} : \frac{dt}{dr} = 0.$$

Betrachten wir einen ganz beliebig rotierenden Körper, bei dem die Hauptträgheitsmomente A, B, C verschieden sind. Dann kann die geforderte Voraussetzung, wegen der Eulerschen Gleichungen, nur erfüllt sein, wenn

1. $p = q = r = o$ ist. Dieser Fall interessiert nicht weiter, da dann $\delta = o$ ist, das heißt überhaupt keine Rotation stattfindet.
2. kann sein: $p = q = o$, $r \neq o$ beziehungsweise
   $q = r = o$, $p \neq o$ und $p = r = o$, $q \neq o$,

das heißt die Rotationsachse hat dann dauernd die Richtung einer Hauptträgheitsachse und steht fest im Raum. Also: Nur die Hauptträgheitsachsen können ohne Einwirkung äußerer Kräfte bei Rotation um dieselbe fest bleiben. (Man nennt diese auch freie Achse). Tritt also auch nur eine geringe Abweichung der Rotationsachse von der Hauptträgheitsachse ein, so bleibt erstere auch ohne Einwirkung äußerer Kräfte nicht mehr fest im Raum, sondern ändert sich.

Soll ein Körper um eine unfreie Achse gleichförmig rotieren, so kann nach den mechanischen Gesetzen der Rotation um eine feste Achse nicht gleichzeitig $pq = qr = rp = o$ sein. Wenn also

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dt}{dq} = \frac{dr}{dt} = 0$$

sein soll, mit anderen Worten die Rotationsachse festliegen soll, dann können die Eulerschen Gleichungen nur erfüllt sein, wenn nicht gleichzeitig $L = M = N = 0$ ist. Es muß also dann eine ganz bestimmte äußere Kraft auftreten, welche das Festliegen der Rotationsachse im Raume erst möglich macht. Sobald nun die Einwirkung der äußeren Kraft nicht vorhanden ist, kann zur Erfüllung der Eulerschen Gleichungen nicht mehr

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$$

sein, das heißt, der Vektor der Rotationsgeschwindigkeit liegt dann nicht mehr fest, sondern ändert sich. Und da von außen keine Kräfte mehr einwirken, sich also die kinetische Rotationsenergie nicht dem Betrag nach ändern kann, wechselt der Geschwindigkeitsvektor nur seine Richtung im Raum.

Bei der Rotation unseres Luftringes ist nun die Achse der Rotation die Erdachse; diese liegt zum Ring vollkommen symmetrisch und steht senkrecht auf der Ringebene. Sie ist also eine Hauptträgheitsachse.

Nach den Überlegungen von Seite 13 ist nun eine Hauptachse im Raume fest, wenn keine Außenkraft wirkt. Tritt eine solche auf, so kann die Rotations- oder Figurenachse nicht mehr festbleiben, es erfolgt dann die sogenannte reguläre Präzession beziehungsweise eine der anderen möglichen Bewegungen, die für unser Problem aber nicht in Frage kommen und deshalb nicht behandelt werden.

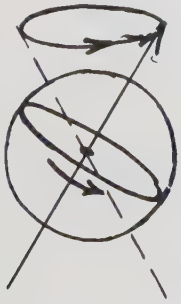
Wir haben also die Voraussetzungen für das Auftreten einer regulären Präzession bei unserem Luftring klargelegt. Es ist das Auftreten einer auf das rotierende System von außen wirkenden Kraft.

Bei den kleinen Hand-Modellen der symmetrischen Kreisel tritt bei Rotation um die Figurenachse (Hauptträgheitsachse in diesem Fall) auch eine Präzession ein, und zwar als Folgeerscheinung der kippend wirkenden Erdanziehung. Diese Gravitationskraft kann nun auf unseren Luftring kein Kippmoment auswirken, da sie ja senkrecht an jedem Massenteilchen zum Mittelpunkt des Ringes hin wirkt.

Welches könnte nun die die Präzession erzeugende Kraft sein?

Es liegt nahe, an die Wirkung außerirdischer Kräfte zu denken, etwa die Gravitationskraft von Sonne, Mond und Planeten.

In der Tat sind diese Kräfte es, welche die Präzession unserer Erde erzeugen. Bekanntlich stellt unsere Gesamterde einen Kreisel dar, der ebenfalls um eine Hauptachse rotiert. Die Erdachse beschreibt bei der Präzession einen Kegel.

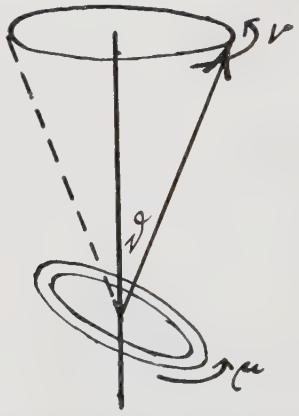


Ein Umlauf erfolgt dabei in 26 000 Jahren [2]). Man sollte nun meinen, daß diese außerordentlich langsame Präzession für unser Luftkreiselproblem gar nicht in Frage kommt, da die Präzessionsgeschwindigkeit bei Ansatz der Rechnung für unseren Ring sich kaum um einige Dimensionen ändert und somit in den Bereich von Größen kommt, die denen unseres Wettergeschehens kaum nahestehen.

Trotzdem erweist es sich, wie aus der folgenden Rechnung sich zeigen wird, daß eine brauchbare Lösung existiert. Um das Ergebnis anzudeuten, sei schon jetzt gesagt, daß für die mögliche Präzessionsgeschwindigkeit, die mit „ν" bezeichnet sei, im Gegensatz zur Rotationsgeschwindigkeit um die Figurenachse „μ", sich eine quadratische Gleichung ergibt, die ja bekanntlich 2 Lösungen hat. Eine dem absoluten Wert nach sehr kleine und eine große. Man nennt die zugehörigen Präzessionen die langsame und die schnelle. Für unsere Gesamterde kann, nach den astronomischen Messungen, nur die langsame Präzession in Frage kommen. Für unser meteorologisches Problem liegt aber die 2. Lösung dieser quadratischen Gleichung durchaus im Bereich der Verwendungsmöglichkeit. Daß wir ihm trotzdem später nicht die Wichtigkeit beilegen, liegt an anderen Gründen, wie weiter unten noch gezeigt wird.

Wir berechnen nun zunächst die Präzession des rotierenden Ringes bei Einwirkung einer allgemeinen Deviationskraft P.

Wir verstehen im folgenden unter ν die Präzessionsgeschwindigkeit, das heißt die Geschwindigkeit, mit der die Figurenachse den Kreiskegel beschreibt. Die Rotationsgeschwindigkeit um die Figurenachse sei μ.



[2]) Die anziehende Kraft von Sonne und Mond wirkt deshalb kippend und dadurch präzessionserzeugend, weil die Erde ein Rotationsellipsoid ist und die der Sonne zugewandten Teile des Massenwulstes stärker angezogen werden als die der Sonne abgewandten.

Die Hauptträgheitsmomente unseres Luftkreisels seien A, B, C. Da derselbe axialsymmetrisch ist, so folgt B = A. Der Winkel, den die Figurenachse mit der Achse der Präzession bildet, sei δ. Die Präzessionsgeschwindigkeit eines symmetrischen Kreisels, bei dem nur die äußere Kraft P wirkt, berechnet sich nun nach den Gesetzen der analytischen Mechanik aus folgender Formel [3]):

$$P = C \cdot \mu \cdot \nu + (C - A)\, \nu^2 \cdot \cos \delta.$$

Löst man diese Gleichung nach ν auf, so erhält man:

$$\nu = -\frac{C}{C - A} \cdot \frac{\mu}{2 \cdot \cos \delta} \pm \sqrt{\frac{C^2\, \mu^2}{(C - A)^2\, 4 \cdot \cos^2 \delta} + \frac{P}{(C - A)\, \cos \delta}}$$

Ehe wir die Formel weiter vereinfachen, sollen zur Erleichterung der Rechnung einige Hilfsüberlegungen angestellt werden.

Für die Größe ν ergeben sich 2 Werte, ein absolut genommen großer mit negativem Vorzeichen und ein kleiner positiver. Man spricht von den sogenannten langsamen und schnellen Präzessionen. Und zwar heißt die mit positivem ν die progressive, und die mit negativem ν die retrograde Präzession. Für die progressive, langsame Präzession ergibt sich z. B. bei der Erde ein sehr kleiner Wert. Wir wissen, daß bei dem Erdkreisel z. B. ν so klein ist, daß zu einem Umlauf 26 000 Jahre benötigt werden. Die genaue Rechnung wurde vom Verfasser auch für unseren Fall des Luftkreisels durchgeführt. Da sie etwas verwickelt ist und keine Bedeutung für unser Problem hat, soll nur das Ergebnis gebracht werden. Als langsame Präzessionsgeschwindigkeit ergibt sich für unseren Luftkreisel (wegen der geringeren Trägheitsmomente gegenüber der Erde) ein 152,5 mal so großer Wert von ν, als bei der Erde. Das würde einer Umlaufszeit von 170,5 Jahren entsprechen, einer Zeitspanne, die für die Meteorologie kaum von Bedeutung ist.

Es interessiert also nur noch die schnelle, rückläufige Präzession.

Bei der Betrachtung der Formel für ν ist es von Wichtigkeit, eine Abschätzung des Ausdruckes

$$\frac{P}{(C - A) \cdot \cos \delta}$$

zu haben.

Wegen der Kleinheit der Deviationskraft gegenüber den ungeheuren Trägheitsmomenten ($C = \frac{1}{2}\, mR^2$ mit $R = 5{,}8 \cdot 10^3$ km) können wir diesen Bruch unter der Wurzel vernachlässigen. (Bei der genauen Berechnung der langsamen Präzession darf diese Abschätzung nicht gemacht werden, da dieser Bruch gerade den Betrag der langsamen Präzessionsgeschwindigkeit liefert.) Im

[3]) Vergl. F. Klein und A. Sommerfeld: Theorie des Kreisels, S. 177.

Falle der schnellen Präzession fällt aber dieser Fehler nicht ins Gewicht. Vernachlässigen wir nun diesen Ausdruck unter der Wurzel, so erhalten wir als Wert der schnellen Präzession

$$\nu = - \frac{2\,C}{C - A} \cdot \frac{\mu}{2 \cos \delta},$$

$$\nu = - \frac{C}{C - A} \cdot \frac{\mu}{\cos \delta} .$$

Für das Trägheitsmoment eines Ringes um die Rotationsachse findet man nun $C = m R^2$, wobei m die Ringmasse und R der mittlere Radius ist.
Für A ergibt sich $\frac{1}{2}$ m R^2.
Es wird also:

$$\nu = - \frac{2\,\mu}{\cos \delta}$$

Diese Hauptformel liefert uns also die Präzessionsgeschwindigkeit als Funktion der Rotationsgeschwindigkeit, wenn wir das Glied mit der Deviationskraft P unter der Wurzel vernachlässigen können. Es wundert uns besonders, daß in dem Ergebnis weder die Masse des Luftringes, noch sein mittlerer Radius auftaucht. Die Präzessionsgeschwindigkeit ist aber vollkommen unabhängig von diesen beiden Größen, d. h. es kommt gar nicht darauf an, welche Ausmaße unser Luftring annimmt, und in welcher Breite er liegt. Maßgebend ist eben nur seine Umlaufsgeschwindigkeit. Es liegt das an dem Auftreten des Quotienten $\frac{C}{C - A}$, wodurch sich alle charakteristischen Ringgrößen herauskürzen.

Die Lunisolarpräzession.

Wir betrachten nun zunächst den Fall, daß die Deviationskraft P durch die Gravitation von Sonne und Mond geliefert wird. (Bei der Erde nennt man die zugehörige Präzession die lunisolare.) Die genauen Rechnungen wurden vom Verfasser durchgeführt und dabei erkannt, daß P tatsächlich außerordentlich klein ist gegenüber den anderen auftretenden Größen. Wegen der Wertlosigkeit dieser Lunisolarpräzession für unsere meteorologischen Betrachtungen sollen hier die Ergebnisse der Rechnung nur kurz angegeben werden.

Die Präzession unseres Luftringes muß sich nun der der Erde überlagern. Da die der Erde aber so außerordentlich langsam stattfindet (360° in 26 000 Jahren), so können wir die Richtung der

Erdachse im Raum als konstant ansehen. Die Figurenachse unseres Luftringes, die sich ursprünglich mit der Erdachse deckte, beschreibt nun bei der schnellen Präzession auch einen Kreiskegel um die Achse der Präzession der Erde (Senkrechte auf der Ekliptik) mit dem Öffnungswinkel $2\,\delta = 2 \cdot 23{,}5^0 = 47^0$.

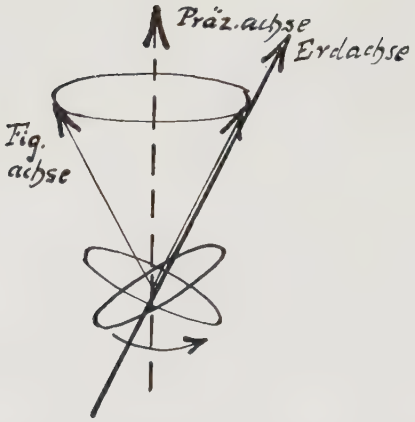
$$\text{Es ist } \nu = -\frac{2\,\mu}{\cos\,\delta}.$$

Da hier $\delta = 23{,}5^0$ ist, ergibt sich $\nu = -\frac{2\,\mu}{0{,}92} \approx -2{,}18\,\mu$.

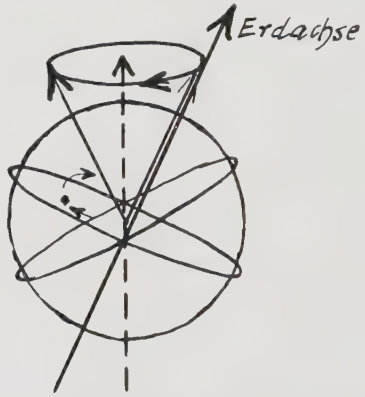
μ ist die absolute Rotationsgeschwindigkeit des Ringes. Diese ergibt sich aus der Rotationsgeschwindigkeit der Erde und der relativen Rotationsgeschwindigkeit. Da letztere gegen erstere nur $6^2/_3$ % etwa ausmacht, setzen wir μ rund gleich der Erdrotationsgeschwindigkeit.

Ein Erdbewohner bewegt sich nun mit der Erde in west-östlicher Richtung mit der Geschwindigkeit 1 μ. Da unsere Präzessionsgeschwindigkeit den Betrag $-2{,}18\,\mu$ hat, so ist sie gegenläufig vom absoluten Betrag 2,18 μ. Relativ zum Erdbewohner beträgt sie dann natürlich $-3{,}18\,\mu$. Das besagt mit anderen Worten: Für einen Umlauf braucht die Figurenachse, gesehen vom Standpunkt des Erdbewohners, $24 : 3{,}18 = 7{,}55$ Stunden. Bei dieser Präzession führt unser Luftring eine eigenartige Schaukelbewegung aus. Sie ist vielleicht am anschaulichsten klarzumachen an einem Beispiel. Man denke sich einen Kinderspielreifen beim Ausrollen und Umkippen. Seine höchste Stelle vom Boden aus gemessen, eilt dabei auch dauernd weiter herum. Durch Energieverlust wird diese Höhe immer niedriger, die Umlaufsgeschwindigkeit immer größer, bis der Ring schließlich flach auf dem Boden liegt.

Da es sich in unserem obigen Falle um einen Hochdruckring handelt, wird die Präzession eine periodische Druckschwankung hervorrufen, die die Erde von Ost nach West im Tempo 3,18 μ umkreist. Infolge der Neigung der Figurenachse gegen die Achse der Präzession von $\delta = 23{,}50^0$ wird eine Stelle unseres Luftringes nach einem halben Umlauf der Präzession eine Hochwölbung nach Norden um den Betrag von 47^0 erfahren haben. Diese Hochwölbung nimmt dann bei dem nächsten halben Umlauf wieder gegen Null ab und so wiederholt sich dieser Vorgang periodisch. Die Druckschwankung hat die Periode 7,5 Stunden; dabei ist die Nord-



verlagerung des Hochdruckringes nicht konstant, sondern nimmt bei jedem Umlauf von Null an ihren höchsten Wert nach einem Umlauf von π an, und zwar bis in Breiten von etwa 65°—75° (Roßbreiten 20 bis 30° + 47°). Für die geringeren Breiten müßte eine doppelte Druckschwankung eintreten, nämlich



wenn die Vorderseite des Ringes passiert, der Erdort befindet sich dann gewissermaßen innerhalb des Ringes, und wenn die Rückseite passiert, der Erdpunkt also wieder aus dem Ring heraustritt.

Zudem kommt die Tatsache, daß die nördlichste Stelle des Hochdruckringes die Erde nicht in einer festen geographischen Breite in etwa 7½stündiger Periode umeilt, sondern bei jedem Umlauf von den Roßbreiten sich hochwölbt bis in obige, hohe Breiten, um dann wieder stetig gegen die Breite von 20°—30° zu sinken nach einem durchlaufenen Winkel von 2 π.

Diese ganzen Überlegungen, obwohl sie doch immerhin in dem Bereich der Möglichkeit liegen, scheinen doch so gewagt, daß wir ihnen keine besondere Bedeutung beimessen wollen. Es ist zwar eine 8stündige Druckwelle schon bekannt, die durch unsere Überlegungen eine gewisse Bestätigung erfahren könnte, beziehungsweise in ihrer Entstehung erklärt werden könnte, aber eine Wirkung des Roßbreitenhochs bis in Zonen der Breite von etwa Spitzbergen und Grönland wird für unwahrscheinlich gehalten.

Die Präzession, hervorgerufen durch irdische Deviationskräfte.

Nunmehr soll von der durch außerirdische Kräfte verursachten Präzession abgesehen werden. Wir werden sehen, daß auf unseren Luftkreisel irdische Kräfte wirken, die ebenfalls eine Präzession erzeugen können. Wie wir bereits an obigem Beispiel gesehen haben, vermögen schon sehr kleine Kräfte eine solche Bewegung hervorzurufen. Wir überlegen uns nun noch einmal das Zustandekommen der allgem. Roßbreitendrift in der Höhe. Die vom Äquator abgedrängte Höhenluft folgt dem allgemeinen Druckgradienten nach Norden. Bei dieser Bewegung wirkt die bekannte Coriolisbeschleunigung in ablenkendem Sinne nach rechts, bis die Höhenströmung eine west-östliche Richtung angenommen hat. In diesem Zustand halten sich nun Corioliskraft, deren Betrag ja bekanntlich $2\ C \cdot \sin \varphi \cdot v$ ist, und der nordwärts gerichtete Gradient das Gleichgewicht. Unter diesen Umständen ist nun, wenn wir von der Gravitation der Sonne und des Mondes absehen, unser Luftkreisel kräftefrei. Es wäre also zunächst kein Grund für das Auftreten einer Präzessionserscheinung einzusehen, da die Rotationsachse gleichzeitig Symmetrieachse, also freie Achse ist.

Bei dieser allgemeinen Kräfteverteilung können nun durch die verschiedensten Umstände Störungen entstehen. Die Windgeschwindigkeit wird sich kaum erheblich ändern, so daß auch die Corioliskraft im wesentlichen konstant bleibt. Aber eine Änderung des Druckgradienten ist durch die verschiedensten Vorgänge möglich. So kann sich derselbe über große Strecken hinweg ändern nach der positiven oder negativen Richtung hin etwa durch die verschiedene Erwärmung der Kontinente, beziehungsweise Ozeane. Es kann also eine Änderung des Druckgradienten eintreten durch eine solche des allgemeinen Temperaturgradienten. Eine Störung des Druckgleichgewichts läßt unseren Kreisel aber sofort nicht mehr kräftefrei sein. Und wenn auch die auftretenden Wirkungen nur sehr gering sind, so reichen sie zum Auftreten einer Präzession vollkommen aus. In dem bereits abgeleiteten Beispiel erkannten wir ja schon, daß die Kraft, die die Präzession der Erde, beziehungsweise des Ringes hervorruft, so klein ist im Verhältnis zu

den anderen Größen, daß sie in die Schlußformel für die Präzessionsgeschwindigkeit gar nicht eingeht. Auch bei den folgenden Rechnungen wird sich das wieder zeigen. Wir wollen nun die Präzession mathematisch untersuchen. Wir werden erkennen, daß sie sich in wesentlichen Punkten von der vorigen unterscheidet. Bei den Überlegungen des vorigen Problems beobachteten wir gewissermaßen von einem außerirdischen Standpunkt. Nunmehr betrachten wir nur ein irdisches Problem. Wir sehen also von der Erdbewegung ab und behandeln die Bewegung unseres Luftringes nur relativ zur Erde.

Wie weiter oben bereits berechnet wurde, beträgt der Erdumfang in den Roßbreiten, für die wir eine mittlere Breite von etwa 25° annehmen wollen, $40\,000 \cdot \cos 25^\circ = 40\,000 \cdot 0{,}9$ km. Bei einer mittleren Windgeschwindigkeit von 100 km/Stunde ergibt sich somit eine Umlaufszeit von

$$T = \frac{40\,000 \cdot 0{,}9}{100} \text{ Std.}$$

$$= 15 \text{ Tage.}$$

Für die Rotationsgeschwindigkeit unseres Luftkreisels erhalten wir somit, wenn wir die Zeit in Tagen rechnen,

$$\mu = \frac{2\pi}{15} .$$

Die Präzessionsgeschwindigkeit finden wir wieder nach der allgemeinen Formel von Seite 19.

Bei Vernachlässigung des Gliedes mit P, was aus den oben schon angeführten Gründen erlaubt ist, finden wir wiederum

$$\nu = - \frac{2\mu}{\cos \delta} .$$

Zum Unterschied mit unserem ersten Problem stellt hierin δ nicht einen festen Winkel dar von 23,5°, sondern kann ganz beliebige Werte annehmen, je nachdem welche Kräfte eben eine Abweichung der Figurenachse des Ringes von der Achse der Präzession, also der Erdachse hier, hervorrufen. δ kann also von den kleinsten Werten bis zu einer gewissen Größe alle Stufen durchlaufen.

Um einen Überblick darüber zu erhalten, wie sich die verschiedenen δ auf die Präzessionsgeschwindigkeit ν auswirken, soll eine kleine Tabelle aufgestellt werden, aus der sofort die zugehörige Größe $\frac{2}{\cos \delta}$ zu entnehmen ist. Durch Multiplikation mit μ ergibt sich jeweils sofort $|\nu|$.

δ	$\cos \delta$	$\frac{2}{\cos \delta}$
0^0	1	2
5^0	0,996	2,01
10^0	0,985	2,03
15^0	0,966	2,07
20^0	0,94	2,13
25^0	0,906	2,21
30^0	0,866	2,31

Wir erkennen an den Werten der Größen $\frac{2}{\cos \delta}$, daß eine Schwankung des Winkels δ keine wesentliche Änderung der Geschwindigkeit der Präzession hervorruft. Erst bei größeren Werten von δ, die in der Praxis wohl kaum auftreten, fällt diese Größe ins Gewicht. Bei $\delta = 25^0$ noch macht die Änderung gegen $\delta = 0^0$ erst etwa 10 % aus.

Anders verhält es sich mit der Größe μ. Eine Schwankung der Rotationsgeschwindigkeit wirkt sich sofort mit etwa dem doppelten Betrag auf die Präzessionsgeschwindigkeit aus. Wir werden aus diesen Tatsachen noch weitere Schlüsse ziehen.

Nehmen wir einmal als obere Grenze von δ etwa den Wert $17—18^0$ an, so wird für diesen Maximalwert

$$\nu = -\ 2{,}1\ \mu.$$

Nun war

$$\mu = \frac{2\,\pi}{15}\ ,$$

also ist

$$\nu = -\ \frac{2{,}1}{15} \cdot 2\,\pi.$$

Nach der bekannten Formel $T = \frac{2\,\pi}{\nu}$ erhalten wir nun für die Umlaufszeit der Präzession:

$$T = \frac{2\,\pi \cdot 15}{2{,}1 \cdot 2\,\pi}$$

$$T \sim 7{,}15 \text{ Tage.}$$

Die Figurenachse unseres Luftringes durchläuft somit einen Kegelmantel um die Erdachse vom Öffnungswinkel $2\,\delta$ mit einer Umlaufszeit von rund 7 Tagen. Genauere Grenzen sind für

$$0 < \delta < 30^0 :$$

$$7{,}5 > T > 6{,}5 \text{ Tage.}$$

Dabei hat also der Luftring zur Ebene des 25. Breitenkreises dauernd eine Neigung von konstantem Absolutbetrag δ^0.

Wenn nun auch der Winkel der Neigung der Figurenachse zu der der Präzessionsachse einen geringen Einfluß auf den Betrag der Präzessionsgeschwindigkeit hat, so ist die Wirkung einer Änderung der Rotationsgeschwindigkeit μ um so größer.

Aus $\nu \sim 2{,}1\ \mu$ folgt, daß eine Schwankung der Windgeschwindigkeit im Roßbreitenhoch um 10 %, sich um dieselben Prozentbeträge bei der Präzessionsgeschwindigkeit auswirkt. Es kann also mit anderen Worten von einer festen Periode bei der Luftdruck-

Umlaufsgeschw. in km/Std.	60	70	80	90	100	110 km/Std
Umlaufszeit der Präzession in Tagen	11,9	10,2	8,9	7,9	7,15	6,5 Tage

schwankung, hervorgerufen durch diese Präzessionserscheinung, nicht die Rede sein. Eine Schwankung der Rotationsgeschwindigkeit ruft in gewissen Grenzen sofort eine solche der Präzessionsgeschwindigkeit hervor.

Wie bereits weiter oben geschildert wurde, handelt es sich bei unserer Kreiselbewegung um Vorgänge in höheren Schichten der Atmosphäre. Die hohen Drucke unseres Luftringes überlagern sich den Druckschwankungen der niedrigeren Schichten. Unsere Bewegung ruft also periodische Vorgänge hervor, die ausgesprochene West-Ostrichtung [4]) haben. Es wären also rein physikalisch solche Luftdruckwellen zu erklären, die eine Periode von etwa 6—8 Tagen haben und west-östlich [4]), also zonal, gerichtet sind.

Solche Wellen sind beobachtet worden, und diese könnten durch unsere Herleitungen auch ihre physikalische Realität erfahren.

Aber es soll noch der Versuch gemacht werden, die für die Anhänger der Wellensteuerung so wichtige 36tägige Welle durch unsere Erscheinung zu erklären. Bei dieser Welle handelt es sich um eine ganz ausgesprochen zonal gerichtete Erscheinung.

Schmiedel hat neuerdings diese Welle als stehende Welle bezeichnet. Bei der im Dezember 1923 und Januar 1924 beobachteten Gesamtwetterlage treten (siehe Schmiedel Seite 35—36) extreme Elongationen über Rußland beziehungsweise über dem Atlantik südwestlich von Irland auf und halten sich dort über die Dauer von etwa 14 Tagen, dabei eine anhaltende und gleichartige Südweststeuerung verursachend. Gegen Ende dieser Periode verlagert sich das russische Hoch innerhalb weniger Tage zum Atlantik und umgekehrt das dortige Tief an die Stelle des ersteren. Diese Er-

[4]) oder umgekehrt.

scheinung wird sogar als eine Bestätigung der Annahme der stehenden Schwingung angesehen.

Diese ganzen Verhältnisse scheinen sich ebenfalls mit der Erscheinung unserer Präzession erklären zu lassen.

Wir greifen zunächst zurück auf die Tatsache, daß die Figurenachse des Kreisels freie Achse ist. Eine Präzession kann also nur auftreten, wenn äußere Kräfte mit ihrem Deviationsmoment wirken. Ist das der Fall, dann tritt eine Präzession auf mit einer Umlaufsgeschwindigkeit von rund 7 Tagen. Sie ist also verhältnismäßig hoch und würde in der Tat der Wanderungsgeschwindigkeit entsprechen, mit der das Rußlandhoch sich mit dem Atlantiktief vertauschte. Die Konstanz der Druckextreme über 14 Tage hinweg über Rußland beziehungsweise über dem Atlantik läßt sich mit der Präzessionstheorie noch leichter erklären. Wenn nämlich während des Vorganges der Präzession die Deviationskräfte plötzlich verschwinden, so muß, da ja die Figurenachse freie Achse ist, die Präzession aufhören. Tritt dieser Fall ein, wenn die Ebene unseres Druckringes gerade noch eine gewisse, vielleicht auch geringe Neigung gegen die Präzessionsachse von der vorausgegangenen Präzession hat, so muß die begleitende Druckwelle ebenfalls stehen, was aber nicht mit dem Begriff der stehenden Welle zu verwechseln ist. Die Hochdruckwirkungen der Roßbreiten, die sich ja bekanntlich nach unten durchsetzen und durch unsere Präzession um die Erde von Ost nach West umgelaufen waren, werden also stationär, wenn die Deviationskraft wegfällt. Tritt eine solche wieder auf, und das ist bei der oben beobachteten Wetterlage nach 14 Tage der Fall gewesen, so taucht auch die Präzession wieder auf, die die Druckgebilde dann wandern läßt.

Mit dieser Erklärung sinkt natürlich die Bedeutung der 36-tägigen Druckwelle. Sie wird eine Funktion unserer, durch Präzession entstandenen, etwa 6—8tägigen Druckwelle und der auftretenden Deviationskräfte.

Aus dem Ansatz der Kreiseltheorie auf die Probleme der periodischen Luftdruckschwankung eröffnen sich nun noch weitere Möglichkeiten.

In der Schlußformel für die Präzessionsgeschwindigkeit tauchten ja bekanntlich keine Größen mehr auf, die über Masse und Größe unseres Luftkreisels Auskunft geben. Lediglich die Rotationsgeschwindigkeit ist maßgebend. Es ist also durchaus denkbar, daß etwa zwei Luftringe sich übereinander befinden, die durch verschiedene Umlaufsgeschwindigkeiten und verschiedene Winkel δ zwischen Figurenachse und Präzessionsachse zwei verschiedene Präzessionen ausführen, die sich dann überlagern. Auch können Ringe in verschiedenen geographischen Breiten liegen und in verschiedener Höhe, etwa $\varphi = 20^0$ und $\varphi = 30^0$, und ihre Präzession

ausführen. Wenn dabei δ hinreichend kleine Werte annimmt, können die umlaufenden Druckwirkungen verhältnismäßig gering werden.

Präzession des Luftringes über dem Äquator.

Da bekanntlich über dem Äquator ziemlich starke Ostwinde wehen, so läßt sich auch unser Problem ansetzen auf einem Luftring über dem Äquator. Bei einer Windgeschwindigkeit von 60 km/Std. ergibt sich eine Umlaufszeit von

$$T = \frac{40\,000}{60} \text{ Std.} = \frac{40\,000}{60 \cdot 24} \text{ Tage.}$$

$$T = \sim 28 \text{ Tage.}$$

Die Rotationsgeschwindigkeit μ ist dann

$$\mu = \frac{2\,\pi}{28}$$

Da nach unserer Formel etwa

$$\nu = -\ 2.2\ \mu$$

ist, so ergibt sich eine Präzessionsgeschwindigkeit (relativ gegen die Erde) von

$$\nu = -\frac{2.2 \cdot 2\,\pi}{28}. \quad \text{Aus } T = \frac{2\,\mu}{\nu}$$

ergibt sich die Umlaufszeit zu

$$T = \frac{2\,\pi \cdot 28}{2.2 \cdot 2\,\pi}$$

$$T = 12.7 \text{ Tage.}$$

Diese Präzession würde also eine Druckschwankung in den Nachbargebieten nördlich und südlich des Äquators hervorrufen, von der Periode 12.7 Tage. Ihre Umlaufsrichtung ist eine west-östliche. Für die Umlaufsgeschwindigkeit, mit der die zonalen Druckwellen, hervergerufen durch Präzession von Luftringen, verlaufen, ergaben sich je nach der Geschwindigkeit der rotierenden Luftmassen Umlaufszeiten zwischen etwa 7—12 Tagen.

Aber auch Druckwellen von etwa der halben oder ein drittel der Periode lassen sich durch die Erscheinung der Präzession erklären. Wie oben bereits gesagt wurde, geht der Radius und die Masse der rotierenden Luftringe nicht in die Formel für die Präzessionsgeschwindigkeit ein. Wir können uns somit vorstellen, daß eine rotierende Luftmasse mit größerer Höhenerstreckung sich in einen unteren und einen darübergelagerten Ring teilt. Wenn nun die beiden Figurenachsen durch verschiedene Kräfte nach

etwa entgegengesetzten Richtungen abgelenkt werden, so überlagern sich die beiden Präzessionen. Die Druckschwankungen, die durch sie hervorgerufen werden, haben eine Phasenverschiebung von π. Es erscheint somit dem Beobachter so, als ob nur eine Welle mit der doppelten Umlaufsgeschwindigkeit umliefe. Wenn allerdings die beiden Winkel δ_1 und δ_2 nicht gleich sind, müßten sich kleine Unterschiede bei zwei aufeinanderfolgenden Druckextremen einstellen. Doch entspricht in diesem Fall das drittfolgende wieder dem ersten. Auch eine andere Phasenverschiebung kann eintreten, also nicht π, sondern ein beliebiger anderer Winkel. Für diesen Fall treffen zwei Druckextreme in kürzerer Folge ein, um dann erst nach längerer Zeitspanne in gleichem Abstand wieder aufzutreten.

Verfolgt man diese Gedankengänge weiter, so kann man schließlich auch Druckwellen von $^1/_3$ oder $^1/_4$ der Umlaufszeit erklären, wenn sich 3 bzw. 4 Präzessionen mit ihren Druckwirkungen überlagern. Allerdings müssen die Druckringe dann stets übereinander liegen, da sie sich sonst bei ihren Bewegungen stören.

Alle unsere Überlegungen und Rechnungen stützen somit die Wellentheorie insofern, als sie eine physikalische Erklärung für die Entstehung der verschiedensten zonalen Druckwellen liefern. Doch widersprechen sie den festen Umlaufszeiten. Diese hängen ja nach Obigem von den Rotationsgeschwindigkeiten der Ringe ab, die aber zwischen gewissen Grenzen schwanken kann.

Die progressive langsame Präzession bei nicht vernachlässigbaren, größeren Deviationskräften.

Einen für unsere Betrachtungen interessanten Fall der Präzession liefert noch die Rechnung, wenn das Kippmoment P des Ringes einen so großen Betrag annimmt, daß wir es nicht mehr vernachlässigen können. Die Präzessionsgeschwindigkeit ν ergab sich ja (s. S. 11) nach der Formel:

$$\nu = -\frac{C}{C-A} \cdot \frac{\mu}{2\cos\delta} \pm \sqrt{\frac{C^2\mu^2}{(C'-A)^2\,4\cos^2\delta} + \frac{P}{(C-A)\cdot\cos\delta}}$$

Wir betrachten die Bewegung wieder nur relativ zur Erde. Für ein bezüglich der Erde ruhendes Massenteilchen ist ja die von der Rotation herrührende Zentrifugalkraft durch die abgeplattete Form der Erde abgeglichen, in den Luftmassen durch die Form der Äquipotentialflächen. Sind aber die Massenteilchen in einer relativ zur Erde zonalen Bewegung begriffen, so kommt eine zusätzliche Zentrifugalkraft zur Geltung, die sich in der Ablenkung durch die Erdrotation äußert. Wir können somit von der Betrach-

tung der Erdrotation absehen, weil ihre Wirkung abgeglichen ist, und unsere Luftringe als Kreisel ansehen, die sich nur relativ zur Erde drehen.

Wie bereits oben ausgeführt wurde, kommt die Präzession zustand durch das Kippmoment P, welches seinerseits die Folge einer Versteilung des nord-südlich gerichteten Druckgradienten ist. Wenn nun diese Versteilung des Gradienten längs größerer Ringteile stattfindet, so summieren sich die Einzelwirkungen und P nimmt solche Beträge an, daß es nicht mehr vernachlässigt werden darf.

Wir vereinfachen zunächst obige Formel. Es war C das Hauptträgheitsmoment des Ringes um die Figurenachse $C = m R^2$, ferner war $A = \frac{1}{2} m R^2$. Da δ als Präzessionswinkel klein ist, setzen wir $\cos \delta = 1$. Dann lautet unsere Formel:

$$(1)\quad \nu = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 + \frac{P}{\frac{m}{2} R^2}} = -\mu \pm \mu \sqrt{1 + \frac{P}{\frac{m}{2} R^2 \cdot \mu^2}}$$

Bei den in Frage kommenden Druckgradienten ist das Glied mit P von der Größenordnung 10^{-1} bis 10^{-2} (vergl. Rechng.), so daß wir für $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} + \cdots = \sim 1 + \frac{\alpha}{2}$ setzen können. Es ist damit für die progressive Präzession:

$$\nu = -\mu + \mu \left(1 + \frac{P}{m R^2 \cdot \mu^2}\right) = -\mu + \mu + \frac{P}{m R^2 \cdot \mu}$$

$$(2)\quad \nu = \frac{P}{m R^2 \cdot \mu} .$$

Diese direkte Proportionalität der Präzessionsgeschwindigkeit zu P und die indirekte zu μ zeigt in der Tat der Spielkreisel. Zunächst führt er bei hoher Tourenzahl eine langsame Präzession aus. Erlahmt aber durch Reibung die Rotation, so neigt er sich mehr und mehr, die Deviationskraft P wächst, und ν wächst in steigendem Maß bis der Kreisel schließlich umfällt.

Bei einer Windgeschwindigkeit von 100 km/Std. in etwa 25^0 Breite ergibt sich eine Umlaufszeit von rund 15 Tagen $= 15 \cdot 86\,400$ sec. Daraus folgt die Rotationsgeschwindigkeit

$$\mu = \frac{2\pi}{15 \cdot 86\,400} = 0{,}487 \cdot 10^{-5} \text{ (cgs)}.$$

Die Deviationskraft P, oder besser gesagt das Kippmoment P, ergibt sich aus der Wirkung des Druckgradienten auf die Massenelemente des Ringes. Die vom Gradient auf die Masse 1 bewirkte Kraft findet man durch Multiplikation mit dem spezifischen Volumen, die auf die Masse eines Raumelementchens ΔV bewirkte

Kraft nach dem Gesetz $K = \Delta V \cdot G$. G ist dabei der Gradient, ΔV das Raumelement.

Bei dem folgenden Beispiel sei der Druckgradient sinusförmig längs des 25. Breitengrades verteilt. Er möge also für $\lambda = 90^0$ den Höchstwert G nach Norden haben, für $\lambda = 270^0$ den Betrag „— G". Nach $\lambda = 0^0$ und $\lambda = 180^0$ hin soll er wie $G \cdot \sin \lambda$ abnehmen. ds sei ein Bogenelement (Fig. X) und q der Querschnitt des Raumelementchens. Das vom Gradient $G \cdot \sin \lambda$ auf dieses bewirkte Drehmoment ist dann:

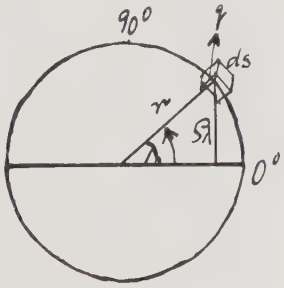
$$\Delta V \cdot \varrho_\lambda \cdot G \cdot \sin \lambda = q \cdot ds \cdot \varrho_\lambda \cdot G \cdot \sin \lambda.$$

Das Gesamtmoment findet man durch Integration:

$$P = 2 \int_0^{\pi r} q \, ds \cdot \varrho_\lambda \cdot G \cdot \sin \lambda = 2q \cdot G \cdot \int_0^{\pi r} \varrho_\lambda \cdot \sin \lambda \, ds = 2q \cdot G \cdot$$

$$\int_0^{\pi} R \cdot \sin \lambda \cdot \sin \lambda \cdot d\lambda = 4q \cdot G \, R^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 \lambda d\lambda = 4q \cdot G \cdot R^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi \, R^2 \, q \cdot G.$$



$$R = 6370 \cdot \cos 25^0 \text{ km} = 5{,}7 \cdot 10^8 \text{ cm}$$

Nun ist aber $q \cdot 2 \pi R = V$ das Gesamtvolumen unseres Ringes. Es folgt dann: $P = \frac{r}{2} \cdot V \cdot G$. Unter Verwendung dieses Ausdruckes folgt schließlich für $\nu : \nu = \dfrac{\frac{r}{2} \cdot G \cdot V}{m \, R^2 \cdot \mu} = \dfrac{V}{m} \cdot \dfrac{G}{2 \, R \sqrt{\mu}}$.

Da $\dfrac{V}{m} = \dfrac{\text{Volumen}}{\text{Masse}} = \dfrac{1}{\text{Dichte}}$ ist (d = Dichte $= 1.293 \cdot 10^{-3}$), ergibt sich:

$$\nu = \frac{G}{2 \, R \sqrt{\mu \cdot d}} = \frac{G}{2 \cdot 5{,}7 \cdot 10^8 \cdot 0.487 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}293 \cdot 10^{-3}} = \frac{G}{7{,}2} \text{(cgs)}$$

Ein Druckgradient von 1 mbar 100 km entspricht 10^{-4} dyn cm.
1 mbar/1000 km 10^{-5} dyn/cm.

Druckgradient in mbar/km	dyn/cm	Präz. geschw. ν (cgs)	Umlaufszeit der Präz. in sec	Tagen	
1 mbar / 100 km	10^{-4} dyn/cm	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot 10^{-4}$	11,9	(Berechnet mit Formel (1).)
1 mbar / 1000 km	10^{-5} dyn/cm	$0.14 \cdot 10^{-5}$	$45 \cdot 10^{-5}$	52	
1 mbar / 10 000 km	10^{-6} dyn/cm	$0.14 \cdot 10^{-6}$	$45 \cdot 10^{-6}$	520	

Es muß hier nochmal bemerkt werden, daß diese Werte nur gelten für Gradienten kleiner als 10^{-5}, da nur dann die oben gemachte Abschätzung der Wurzel gültig ist. Das beeinträchtigt die Rechnung aber keineswegs, da größere Gradienten als 10^{-5} kaum in Frage kommen bei der weiten Erstreckung der angenommenen Druckverhältnisse. (Für diesen Fall müßte zur Berechnung von ν die nicht vereinfachte Formel (1) herangezogen werden.)

Wir erkennen jedenfalls, daß durch diese progressive Präzession in der Tat zonale West-oststellen durchaus erklärbar sind. Verteilung und Größe des Druckgradienten, sowie der Rotationsgeschwindigkeit μ bedingen Umlaufszeiten von 5 Tagen und mehr, so daß auch hierdurch die zonalen Wellen längerer Periode erklärt werden können.

Auch die retrograde Präzession kann für den Fall nicht vernachlässigter Deviationskräfte betrachtet werden. Die Präzessionsgeschwindigkeit errechnet sich aus der schon angeführten Formel

$$\nu = -\mu - \sqrt{\mu^2 - \frac{P}{\frac{m}{2} R^2}} \tag{1a}$$

bei Verwendung des negativen Wurzelvorzeichens. Es ergeben sich für ν Werte von 2,2 μ an aufwärts. Das entspricht Umlaufszeiten von 7 Tagen und weniger. Für die in Frage kommenden Druckgradienten von 1 mbar 1000 km liegt die Umlaufszeit etwa bei 5 Tagen. Wenn man dieselbe Wurzelvereinfachung ausführt wie oben, ergibt sich

$$\nu = -\mu - \mu \sqrt{1 - \frac{2P}{m R^2 \mu^2}} = -\mu - \mu \left(1 - \frac{P}{m R^2 \mu^2} + \cdots\right)$$

$$\nu = -2\mu \frac{P}{m R^2 \mu} . \tag{2a}$$

Hierbei ist wieder zu berücksichtigen, daß diese Formel nur verwandt werden darf, wenn der Gradient kleiner als 10^{-4} ist; für größere Werte von G ist obige Formel (1a) heranzuziehen.

Die hier berechnete retrograde Präzession kann zur Erklärung zonaler Ost-west-Wellen herangezogen werden, deren Umlaufszeit etwa zwischen 5 und 7,5 Tagen liegt.

Literatur.

Arthur Haas: Einführung in die Theoretische Physik
F. Klein und A. Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels.
K. Schmiedel: Stratosphärische Steuerung und Wellensteuerung.
Koschmieder: Dynamische Meteorologie.
Hann-Sühring: Lehrbuch der Meteorologie.
H. Dörrie: Theoret. Betrachtungen über einige Gebiete der Mechanik.

Lebenslauf.

Ich bin am 27. Februar 1910 zu Salzburg, Kreis Westerburg, als Sohn des Lehrers Heinrich Mannweiler geboren. Nach 9jährigem Besuch der Städtischen Oberrealschule zu Wiesbaden verließ ich diese Anstalt mit dem Zeugnis der Reife, um Mathematik, Physik, Chemie, Turnen und Sport in Frankfurt a/M. zu studieren. Das Sommersemester 1930 verbrachte ich in Wien und kehrte daraufhin nach Frankfurt a/M. zurück. Im Februar 1930 bestand ich das Sportlehrerexamen und im Juli 1933 das Staatsexamen in den übrigen Fächern. Sodann trat ich als Studienreferendar in den höheren Schuldienst. Im September 1935 beendete ich den Vorbereitungsdienst mit dem Assessorexamen. Meine Doktorarbeit mit den notwendigen Vorbereitungen führte ich in der Zeit von Oktober 1936 bis Dezember 1938 bei Herrn Prof. Dr. Mügge aus. Für sein stetes Wohlwollen und seine wissenschaftliche Unterstützung und Förderung bei meiner Tätigkeit möchte ich an dieser Stelle nochmals meinen ergebensten Dank aussprechen.

Rüdiger Mannweiler.